Aufgabe 9.1 Welche der Aussagen sind wahr? (Hier sind $x, y \in \mathbb{R}$.)

a) $0 < 1 \vee 1 > 2$,

b) $0 > 1 \wedge 1 > 2$,

c) $0 < 1 \implies 1 < 2$,

d) $0 > 1 \implies 1 > 2$,

e) $(\exists x)\ x^2 = 4$,

f) $(\exists! x)\ x^2 = 4$
(es existiert ein eindeutiges x),

g) $(\forall x)\ (\exists y)\ x < y$,

h) $(\exists x)\ (\forall y)\ x < y$,

i) $(\forall x)\ (\exists y)\big[x < 0 \wedge y < 0 \implies xy > 0\big]$.

Aufgabe 9.2 Unter Verwendung der Aussagen

A: "Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht."

B: "Der Student hat gewissenhaft studiert."

C: "Der Student hat die Übungsaufgaben gelöst."

D: "Der Student hat das Examen bestanden."

beschreiben Sie symbolisch:

a) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er das Examen.

b) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, aber nicht gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben nicht gelöst hat, besteht er das Examen nicht.

c) Der Student besteht das Examen genau dann, wenn er die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissen hat studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat.

Aufgabe 9.3 Verneinen Sie die Aussagen aus Aufgabe 2. Sorgen Sie dafür, dass in den neuen Aussagen das Zeichen $\neg$ nur vor den "Buchstaben" vorkommt.

Aufgabe 9.4 Beweisen Sie die folgenden Tautologien mithilfe einer Wahrheitstafel.

a) $\big(A \implies \neg A\big) \implies \neg A$,

b) $A \vee \big(B \wedge \neg B\big) \iff \neg A$,

c) $\Big[A \vee \big(B \wedge C\big)\Big] \iff \Big[\big(A \vee B\big) \wedge \big(A \vee C\big)\Big]$,

d) $\Big[\big(A \wedge \neg B\big) \implies \big(C \wedge \neg C\big)\Big] \iff \big(A \implies B\big)$.

Aufgabe 9.5 Sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6\}$.
Bestimmen Sie $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

Beispiel. Wir bezeichnen $\underline{n} := \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Es gilt

$$\underline{3} \subset \underline{5}, \quad 3 \in \underline{5}, \quad \{3\} \subset \underline{5}, \quad \{2,3\} \subset \underline{5}, \quad 5 \notin \underline{3}, \quad \underline{5} \not\subset \underline{3}.$$

Die Elemente von $A = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$ sind selbst Mengen, also

$$\underline{2} \in A, \quad 2 \notin A, \quad \{\underline{2}, \underline{3}\} \subset A, \quad \{2, 3\} \not\subset A, \quad \{2, 3\} \notin A.$$

Aufgabe 9.6 Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\varnothing$, $\underline{1}$, $\underline{2}$.

Beispiel. Wir beweisen die Aussage $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$.

2) rechte Menge $\subset$ linke Menge (die andere Richtung wurde in der Vorlesung gezeigt). Sei $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Dies ist äquivalent zu $x \in A \cup B$ und $x \in B \cup C$ bzw. ($x \in A$ oder $x \in B$) und ($x \in A$ oder $x \in C$). Also auf jeden Fall ist $x \in A$ und in B oder C. Somit $x \in A \cup (B \cap C)$. $\square$

Aufgabe 9.7 Beweisen Sie die De Morganschen Regeln:

a) $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$,

b) $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

Aufgabe 9.8 Beweisen Sie (hier sind A, B, C beliebige Mengen):

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

Aufgabe 9.9 Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Widerlegen Sie die falsche Aussagen, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

a) Binomialkoeffizienten $\binom{10}{k}$ sind für alle durch 5 teilbar.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist x^2 positiv.

c) $\ln|x| > 0$ für alle $x \neq 0$.

d) Alle Zahlen der Form $2^n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ sind prim.

e#) Alle Folgenglieder der durch die Rekursion

$$p_{n+3} = p_{n+2} + p_{n+1} - p_n, \quad p_1 = 5,\ p_2 = 7,\ p_3 = 11$$

definierten Folge sind Primzahlen.

Aufgabe 9.10 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

a) $n^3 + 2n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

b) $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}$.

c) $n^2 \geq 2n + 2$ für alle $n \geq 3$.

d) $n^2 - 1$ ist für alle ungerade $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, durch 8 teilbar.

e#) $2^n \geq n^2 - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9.11 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels Induktion.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d) $4n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar,

e) $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar,

f) $5^n + 7$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar,

g) Die Zahl $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

Aufgabe 9.12 Betrachten Sie die Summen

$$1, \quad 1+3, \quad 1+3+5, \quad 1+3+5+7, \quad \ldots$$

Wie kann man diese Summen (zeichnerich) veranschaulichen? Welchen Wert kann man für die n-te Summe vermuten? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Induktion.

Aufgabe$^{\#}$ 9.13 Eine Pizza wird durch n Geraden in Stücke geschnitten. Die Schnitte können beliebig verlaufen. Wie viele Pizzastücke können höchstens entstehen? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese mit Induktion.

Aufgabe 9.14

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 weißen und 4 schwarzen Kugel in eine Reihe so zu legen, dass 2 schwarze Kugel nie nebeneinander liegen? Unterscheiden Sie die Fälle: (i) die Kugel einer Farbe sind ununterscheidbar, (ii) alle Kugel sind unterscheidbar.

b) Keine drei Diagonalen eines convexen 10-Ecks schneiden sich in einem Punkt. Wie viele Schnittpunkte der Diagonalen gibt es?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme auf einem Schachbrett so zu platzieren, dass sich nicht schlagen und nur auf den schwarzen Feldern stehen?

d) Wie viele verschiedene "Wörter" (bzw. Kombinationen) kann man aus folgenden Buchstaben kostruieren:
(i) ABERZ; (ii) EEGHN; (iii) BEEENTT; (iv) ABRAKADABRA?

e) Das Eishockey-Team besteht aus 2 Torwarten, 7 Verteidigern und 10 Angreifern. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Anfangssechs (bestehend aus 1 Torwart, 2 Verteidigern und 3 Angreifern) zu stellen?

f) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 28 Spielkarten unter 7 Spieler zu verteilen?

g) Wie viele 6-stellige Zahlen gibt es, die nur aus ungeraden Ziffern $(1, 3, 5, 7, 9)$ bestehen?

h) Wie viele Teiler hat die Zahl 462?

i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 Bücher in 5 Pakete zu verteilen, falls 4 der Pakete genau 2 Bücher enthalten sollen.